1.2 Le problème de la courbe brachistochrone (219, 220, 229, 253) [6], [2]

Un peu de phyisque ! Un problème qui a fasciné les scientifiques aux XVIIe siècle, notamment Galilée, deux des Bernoulli et Leibniz, est le problème de la courbe brachistochrone : la racine *brachisto* voulant dire « le plus court » et le suffixe *chrone* faisant référence au temps en grec.
La situation est la suivante : une masse ponctuelle (une bille par exemple) est posée sur une rampe reliant un point A à un point B du plan. Elle est lancée au point A sans vitesse initiale et roule sans frotter sur la rampe jusqu'à atteindre le point B. Le problème de la courbe brachistochrone est de déterminer quelle courbe du plan minimise le temps de trajet de la masse pour relier le point A au point B. Ce développement a donc pour but de le découvrir ! Spoiler : ça va vous étonner.

Théorème 1.3 (La courbe brachistochrone)**.** Considérons le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et des coordonnées (x, y), de sorte que $\mathbf{e}_y$ soit dans le sens de la pesanteur $\mathbf{g}$. Soit B un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_B, y_B) avec :
- $x_B > 0$,
- $y_B > 0$.

Alors la courbe du plan minimisant le temps de trajet d'une masse ponctuelle dans un champ de pesanteur uniforme roulant sans frottement du point O au point B est un arc de cycloïde renversé, c'est-à-dire qu'il existe $R > 0$ (rayon de la cycloïde) et $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ tels que la courbe brachistochrone soit paramétrée par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(\theta) & = & R(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) & = & R(1 - \cos(\theta)) \end{array} \right. , \quad \theta \in [0, \theta_0].$$

Démonstration. **Étape 1 : Obtention d'une condition nécessaire sous la forme d'une équation différentielle pour f via un calcul de variations :**

En notant $(x(t), y(t))$ la position du mobile à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$, et en supposant que notre rampe n'a aucune portion verticale, on peut noter l'équation de cette rampe $y = f(x)$. Notre but est de trouver f, sous les contraintes $f(0) = 0$, $f(x_B) = y_B$ et $f \in \mathscr{C}^0([0, T]) \cap \mathscr{C}^2((0, T))$ où T est la durée que met le mobile à atteindre B (elle dépend de f !). Sous ces hypothèses, on a alors $\dot{x} > 0$ sur $(0, T)$ (voir ce qui suit) L'énergie mécanique étant conservée on a :

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 2gy(t).$$

Or, le mobile glisse sur la courbe. On a donc :

$$\forall t \geq 0, \quad f(x(t)) = y(t).$$

Ainsi :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{x}(t) f'(x(t)) = \dot{y}(t).$$

D'où l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t)^2 \left(1 + f'(x(t))^2\right) = 2gf(x(t)).$$

Ça tombe bien, on peut supposer $f > 0$ sur $(0, x_B]$ car la conservation de l'énergie mécanique nous dit que si le mobile atteint un point d'ordonnée nulle, il aura une vitesse nulle en ce point, et il reviendra donc en arrière et ce n'est pas ce qu'on considère. On a alors :

$$\forall t \in (0, T), \quad \sqrt{\frac{1 + f'(x(t))^2}{f(x(t))}} \dot{x}(t) = \sqrt{2g}.$$

On peut alors intégrer pour obtenir :

$$\int_0^T \sqrt{\frac{1+f'(x(t))^2}{f(x(t))}}\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \sqrt{2g}T,$$

ce qui donne, en effectuant le changement de variable $x = x(t)$ (qui est licite car x est strictement croissante !), on obtient :

$$\int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)}}\mathrm{d}x = \sqrt{2g}T.$$

Le but est donc de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\begin{array}{rccl} J & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ & & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)}}\mathrm{d}x, \end{array}$$

où E est l'ensemble :

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,x_B]) \cap \mathscr{C}^2((0,x_B)) \;\middle|\; f(0)=0; f(x_B)=y_B; f_{|(0,x_A)} > 0 \right\}.$$

Bien que cet ensemble soit convexe, il ne s'agit pas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, ainsi, on ne peut pas parler de la différentielle $dJ(f)$! De plus, l'intégrale ici est impropre. Il se peut donc que pour certaines fonctions, elle soit égale à $+\infty$! Heureusement, en prenant pour f la fonction affine reliant O à B, c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{y_B}{x_B}x$$

on a :

$$J(f) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2}{\frac{y_B}{x_B}x}}\mathrm{d}x = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{x_B^2+y_B^2}{y_B x_B x}}\mathrm{d}x < +\infty.$$

Ainsi :

$$\inf_{f\in E} J(f) < +\infty.$$

Pour simplifier, notons L la fonction :

$$\begin{array}{rccl} L & : & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (y,y') & \longmapsto & \displaystyle\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}. \end{array}$$

Le but est de montrer la condition nécessaire suivante de minimum pour f : Si f minimise J alors elle vérifie les équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall x \in (0,x_B], \quad \frac{\partial L}{\partial y}(f(x),f'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x),f'(x))\right) = 0.$$

Bien qu'on ne soit pas sur un ouvert d'un espace vectoriel normé, on va se ramener à un problème de minimisation sur un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, si on désigne par E_0 l'espace :

$$E_0 := \mathscr{C}_c^\infty((0,x_B))$$

on a :

$$\forall g \in E_0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \varepsilon \in (-\eta,\eta), \quad f+\varepsilon g \in E \text{ et } J(f+\varepsilon g) < +\infty.$$

Notons alors :

$$\begin{array}{rcrcl} u & : & (-\eta,\eta) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & \varepsilon & \longmapsto & J(f+\varepsilon g). \end{array}$$

Si f minimise J sur E, alors nécessairement 0 minimise u sur $(-\eta,\eta)$. Or, puisque g est à support compact, la fonction u est dérivable en 0, et donc :

$$u'(0)=0.$$

Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} u(\varepsilon)-u(0) &= \int_0^{x_B} \left(L\left(f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x)\right) - L\left(f(x),f'(x)\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= \varepsilon\int_0^{x_B}\left(g(x)\frac{\partial L}{\partial y}\left(f(x),f'(x)\right)+g'(x)\frac{\partial L}{\partial y'}\left(f(x),f'(x)\right)+O(\varepsilon)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Le terme en $O(\varepsilon)$ du développement limité tend bien vers 0 par convergence dominée grâce au fait que g soit à support compact. Ainsi :

$$u'(0)=\int_0^{x_B}\left(g(x)\frac{\partial L}{\partial y}\left(f(x),f'(x)\right)+g'(x)\frac{\partial L}{\partial y'}\left(f(x),f'(x)\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties du deuxième terme de la somme donne donc, puisque g est à support compact :

$$u'(0)=\int_0^{x_B} g(x)\left(\frac{\partial L}{\partial y}(f(x),f'(x))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x),f'(x))\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, pour tout $g\in E_0$, on a :

$$\int_0^{x_B} g(x)\left(\frac{\partial L}{\partial y}(f(x),f'(x))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x),f'(x))\right)\right)\mathrm{d}x=0.$$

Cela veut donc dire que le terme intégré est nul, c'est-à-dire :

$$\forall x\in(0,x_B],\quad \frac{\partial L}{\partial y}(f(x),f'(x))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x),f'(x))\right)=0.$$

Explicitons les dérivées partielles de L :

$$\frac{\partial L}{\partial y}(y,y')=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}=-\frac{L(y,y')}{2y}\quad\text{et}\quad\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')=\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=\frac{y'L(y,y')}{1+y'^2}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y}(f(x),f'(x))=-\frac{L(f(x),f'(x))}{2f(x)}\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x),f'(x))\right)=L(f(x),f'(x))\Bigg(&\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}-2\frac{f'(x)^2f''(x)}{(1+f'(x)^2)^2} \\ &+\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}\left(-\frac{f'(x)}{2f(x)}+\frac{f'(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}\right)\Bigg). \end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient donc, après avoir simplifié par $L(f(x),f'(x))$ et multiplié par $2f(x)\left(1+f'(x)^2\right)^2$:

$$-\left(1+f'(x)^2\right)^2-2f(x)f''(x)\left(1+f'(x)^2\right)+2f(x)f'(x)^2f''(x)+f'(x)^2\left(1+f'(x)^2\right),$$

ce qui donne :

$$-1-f'(x)^2-2f(x)f''(x)=0$$

et donc, après avoir multiplié par $f'(x)$ des deux côtés, on reconnaît la dérivée exacte :

$$\forall x \in (0, x_B], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(1+f'(x)^2\right) f(x)\right) = 0.$$

Ainsi :

$$\exists C \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in (0, x_B], \quad \left(1+f'(x)^2\right) f(x) = C.$$

Étape 2 : Analyse et résolution de cette équation différentielle via un paramétrage

Maintenant, on aimerait pouvoir diviser et prendre la racine carrée et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour justifier l'unicité d'une solution que l'on trouverait en intégrant l'équation. Problème, si $f' = 0$ à un certain point, alors Cauchy-Lipschitz ne serait plus appliquable. Il faut donc pouvoir étudier plus en détail le(s) solution(s) de cette équation.

Lemme 1.4. Si f est solution du problème brachistochrone alors :

1. f n'est constante sur aucun intervalle,
2. f a au plus un point critique. Dans ce cas, f admet un maximum en ce point,
3. f est ou bien strictement croissante, ou bien unimodale, i.e. elle est strictement croissante, puis strictement décroissante.
4. f' est strictement décroissante sur $(0, x_B)$.

Démonstration. Voir [2] pour plus de détails.

1. Du fait que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x), f'(x))\right)$ ne fait intervenir au numérateur que f' et f'', on aurait, dans le cas où f serait constante sur un intervalle I :

$$\forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f(x), f'(x))\right) = 0.$$

   Ainsi, on aurait, du fait de l'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par f :

$$\forall x \in I, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(f(x), f'(x)) = 0. \ \textbf{CONTRADICTION !}$$

2. On a :

$$\forall x \in (0, x_B], \quad f(x) = \frac{C}{1+f'(x)^2} \leq C.$$

   De plus, $x_0 \in (0, x_B]$ est tel que $f(x_0) = C$ si et seulement si x_0 est un point critique de f, et alors f y atteint un maximum (global). Supposons qu'il existe deux points critiques distincts $x_0 < x_1$. Du fait que f soit non-constant sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, f prend des valeurs strictement plus petites que C. Or, par compacité de l'intervalle $[x_0, x_1]$, on a :

$$\exists x_2 \in (x_0, x_1), \quad f(x_2) = \max_{[x_0, x_1]} f.$$

   Et donc, $f'(x_2) = 0$. Sauf que $f(x_2) < C$! **CONTRADICTION !**

3. suit de la proposition 2 du fait que la conservation de l'énergie mécanique nous dit que f doit forcément commencer par croître,
4. suit de la proposition 3.

□

Il nous faut alors résoudre cette équation différentielle. Comment ? Déjà, on sait que, sur l'intervalle $(0, x_B]$, la fonction f est strictement positive. On peut donc diviser et obtenir :

$$\forall x \in (0, x_B], \quad f'(x)^2 = \frac{C}{f(x)} - 1.$$

Enfin, notre lemme nous dit qu'on peut partitionner l'intervalle $(0, x_B]$ ainsi :

$$(0, x_B] = I_1 \cup \{x^*\} \cup I_2$$

avec f strictement croissante sur I_1, $f'(x^*) = 0$ et f strictement décroissante sur I_2 (potentiellement, $x^* = x_B$ et $I_2 = \emptyset$ voire x^* n'existe pas). Ainsi, on a l'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcll} f'(x) & = & \sqrt{\dfrac{C}{f(x)} - 1}, & \forall x \in I_1 \\ f'(x^*) & = & 0, & \\ f'(x) & = & -\sqrt{\dfrac{C}{f(x)} - 1} & \forall x \in I_2. \end{array}\right.$$

Par stricte croissance (resp. décroissance) de f sur I_1 (resp. I_2), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur tout sous-intervalle $(0, x_1] \subset I_1$ (resp. sur tout sous-intervalle $[x_2, x_B) \subset I_2$). Or, les solutions se prolongeant toutes, on a unicité de la solution de l'équation différentielle ! Reste à la trouver. Évidemment, on ne sait pas intégrer à vue cette équation. Il faut donc trouver un bon changement de variable. On observe un terme de la forme $1 + f'(x)^2$, qui peut faire penser à de l'arctangente. On va plutôt faire le changement de variable suivant : soit h une fonction de x définie par :

$$h(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2 \operatorname{arccot}(f'(x)) & \forall x \in I_1, \\ \pi & x = x^*, \\ 2\left(\pi + \operatorname{arccot}(f'(x))\right) & \forall x \in I_2 \end{array}\right.$$

de sorte que :

$$\forall x \in (0, x_B], \quad 1 + f'(x)^2 = \frac{1}{\sin\left(\frac{h(x)}{2}\right)^2}.$$

On a alors, en gardant en tête l'équation différentielle satisfaite par f :

$$\forall x \in (0, x_B], \quad f(x) = \frac{C}{2}\left(1 - \cos(h(x))\right).$$

Pour trouver une paramétrisation de notre courbe, on aimerait pouvoir inverser h. Ça tombe bien, h est continue (et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I_1 \cup I_2$) et est strictement croissante sur $(0, x_B]$. Elle effectue donc une bijection sur son image, qui est un intervalle fermé à droite, que l'on notera $(0, \theta_0]$. De plus, étant donné que $f(x_B) > 0$, $f'(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers x_B. On a donc $\theta_0 \in (0, 2\pi)$. Enfin, la régularité de h permet de dire que h^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins sur $((0, \theta_0] \cap (0, \pi)) \cup ((0, \theta_0] \cap (\pi, 2\pi))$. On peut alors dériver h^{-1} et, en se souvenant de l'équation différentielle, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(h^{-1}\right)(\theta) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(\theta)\right)} = \frac{C\sin(\theta)}{2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)} = C\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{C}{2}\left(1 - \cos(\theta)\right).$$

Ainsi, puisque $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et que h^{-1} est continue, on a la paramétrisation de x suivante :

$$\forall \theta \in (0, \theta_0], \quad x = \frac{C}{2}\left(\theta - \sin(\theta)\right).$$

et l'égalité se prolonge en 0 sans soucis ! On a alors, en notant $R = \frac{C}{2} > 0$, la paramétrisation suivante de notre courbe :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & R(\theta - \sin(\theta)) \\ y & = & R(1 - \cos(\theta)) \end{array} \right. , \quad \theta \in [0, \theta_0].$$

Ce qui correspond bien à un arc de cycloïde !

Étape 3 : Justification de l'existence du minimum pour J :

On voudrait alors justifier qu'une solution f_0 de l'équation d'Euler-Lagrange est un minimum global de la fonctionnelle J sur E. On veut alors étudier la fonction L. Si L est strictement convexe, alors on a, pour f_0 solution de l'équation d'Euler-Lagrange et pour tout $g \in E$ tel que $J(g) < +\infty$ et $f_0 \neq g$:

$$\begin{array}{rcl} J(g) - J(f_0) & = & \displaystyle\int_0^{x_B} \left(L(g(x), g'(x)) - L(f_0(x), f_0'(x)) \right) \mathrm{d}x \\ & > & \displaystyle\int_0^{x_B} \langle \nabla L(f_0(x), f_0'(x)), (g(x) - f_0(x), g'(x) - f_0'(x)) \rangle \,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^{x_B} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(f_0(x), f_0'(x))(g(x) - f_0(x)) + \frac{\partial L}{\partial y'}(f_0(x), f_0'(x))(g'(x) - f_0'(x)) \right) \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^{x_B} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0(x), f_0'(x)) \right) (g(x) - f_0(x)) + \frac{\partial L}{\partial y'}(f_0(x), f_0'(x))(g'(x) - f_0'(x)) \right) \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\left[\frac{\partial L}{\partial y'}(f_0(x), f_0'(x))(g(x) - f_0(x)) \right]_0^{x_B}. \end{array}$$

Ainsi, si $\frac{\partial L}{\partial y'}$ est bornée, le terme entre crochets s'annule car f et g sont dans E et alors on aurait :

$$\forall g \in E,\ g \neq f_0, \quad J(f_0) < J(g).$$

Cependant, $\frac{\partial L}{\partial y'}$ n'est pas bornée et L n'est en réalité même pas convexe ! On va alors considérer un problème de minimisation équivalent : si $f \in E$, on pose $g = \sqrt{2f}$, de sorte que :

$$\forall x \in (0, x_B), \quad f'(x) = g(x)g'(x),$$

et :

$$J(f) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + g(x)^2 g'(x)^2}{\frac{g(x)^2}{2}}} \mathrm{d}x = \sqrt{2} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1}{g(x)^2} + g'(x)^2} \mathrm{d}x =: \sqrt{2}\tilde{J}(g).$$

où $\tilde{J}$ est une fonctionnelle définie sur $\sqrt{2E}$ associée à la lagrangienne :

$$\tilde{L}(y, y') = \sqrt{\frac{1}{y^2} + y'^2}.$$

Cette fois-ci, on a :

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{\frac{1}{y^1} + y'^2}}$$

et donc $\left| \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} \right| \leq 1$. De plus :

$$\mathrm{Hess}(\tilde{L})(y, y') = \begin{pmatrix} 2y^{-4}(y^{-2} + y'^2)^{-\frac{3}{2}}(2y^{-2} + v^2) & y^{-3}y'(y^{-2} + y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ y^{-3}y'(y^{-2} + y^2)^{-\frac{3}{2}} & y^{-2}(y^{-2} + y'^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})\,!$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à vérifier que si f_0 est solution de l'équation d'Euler-Lagrange pour L, alors $g_0 = \sqrt{2f_0}$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange pour $\tilde{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y}(g_0, g_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'}(g_0, g_0')\right) &= -g_0^{-3}\left(g_0^{-2} + g_0'^2\right)^{-\frac{1}{2}} - g_0^{-3}\left(g_0^{-2} + g_0'^2\right)^{-\frac{3}{2}}(g_0 g_0')' \\ &= -g_0^{-3}\left(g_0^{-2} + g_0'^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(g_0^{-2} + g_0'^2 + (g_0 g_0')\right).\end{aligned}$$

Or, on a :

$$(2f_0)\left(g_0^{-2} + g_0'^2 + (g_0 g_0')\right) = 1 + f_0'^2 + 2f_0 f_0'' = 0$$

car f_0 vérifie l'équation d'Euler-Lagrange ! Donc, en effectuant les mêmes calculs que plus haut, que g_0 minimise $\tilde{J}$ globalement et donc f_0 minimise J globalement. $\square$

Remarque 1.2.1. *Évidemment, les calculs sont vraiment ultra pénibles et seront passés abondamment pendant le développement. Également, vous remarquerez que certaines étapes mériteront d'être bien détaillées au détriment des autres selon la leçon. Faites au mieux ! En tous cas, j'aime beaucoup ce développement.*